

回帰分析の実践例（その2）

現実のデータ例として、経済学でよく登場する、コブ・ダグラス型生産関数を挙げてみよう。コブ・ダグラス型の生産関数は、生産を Y 、労働を L 、資本を K で表した時に

$$Y = a \times L^\alpha \times K^\beta$$

の形で示される（ a 、 α 、 β は回帰係数＝パラメータ）。この式のままでは、非線形回帰となるが、両辺の自然対数をとって

$$\log Y = \log(a \times L^\alpha \times K^\beta) = \log a + \alpha \log L + \beta \log K$$

となるので、 $\log Y \rightarrow Y'$ 、 $\log a \rightarrow a'$ 、 $\log L \rightarrow L'$ 、 $\log K \rightarrow K'$ のように変数変換を行うことで、線形回帰として扱うことができる。

```
> data1 = read.csv("data1.csv", header=TRUE)
> head(data1)
  REGION PNAME      L      K      Y
1      1 北海道 2701856 5242557 21138285
2      2 青森県  726448 1555125  4820063
3      3 岩手県  732321 1426064  5086755
4      4 宮城県 1142597 2164322  9113268
5      5 秋田県  587615 1212417  3992081
6      6 山形県  641912 1276292  4511686
```

通常散布図行列

```
> plot(~L+K+Y, data=data1)
```

対数軸を指定した散布図行列

```
> plot(~L+K+Y, data=data1, log="xy")
```

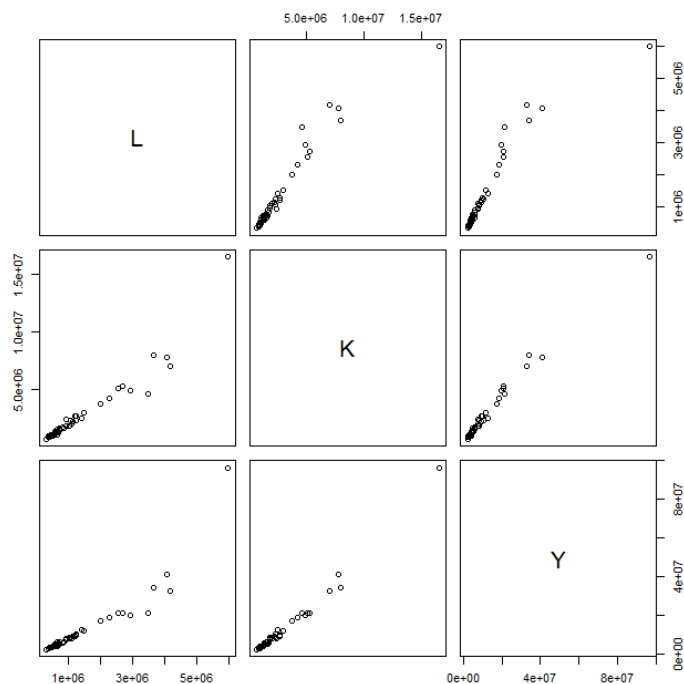


図 1 通常の散布図行列

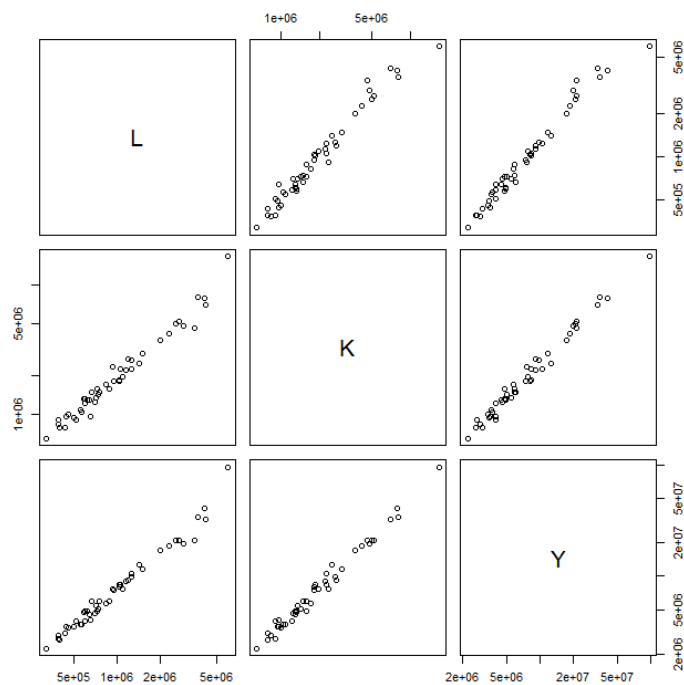


図 2 対数軸を指定した散布図行列

通常の重回帰分析

```

> result1 = lm( Y ~ L+K, data=data1 )
> summary(result1)

Call:
lm(formula = Y ~ L + K, data = data1)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-6477722 -317532  192260  805486 3715094

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.171e+06  4.183e+05  -5.190 5.13e-06 ***
L             -3.569e+00  7.894e-01  -4.521 4.60e-05 ***
K              7.038e+00  3.517e-01  20.010 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1904000 on 44 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9854,    Adjusted R-squared:  0.9847
F-statistic: 1484 on 2 and 44 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

対数を使った重回帰分析（数式内で指定）

```

> result2 = lm( log(Y) ~ log(L)+log(K), data=data1 )
> summary(result2)

Call:
lm(formula = log(Y) ~ log(L) + log(K), data = data1)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.18037 -0.06390 -0.01708  0.05857  0.24851

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -0.2137     0.2903  -0.736  0.46558
log(L)         0.3765     0.1110   3.393  0.00147 **
log(K)         0.7506     0.1127   6.661 3.59e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.09524 on 44 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9872,    Adjusted R-squared:  0.9866
F-statistic: 1699 on 2 and 44 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

対数を使った重回帰分析（変数変換）

```

> data1$logL = log(data1$L)
> data1$logK = log(data1$K)
> data1$logY = log(data1$Y)
> head(data1)
  REGION PNAME      L      K      Y    logL    logK    logY
1      1 北海道 2701856 5242557 21138285 14.80945 15.47232 16.86660
2      2 青森県  726448 1555125  4820063 13.49592 14.25707 15.38830
3      3 岩手県  732321 1426064  5086755 13.50397 14.17043 15.44215
4      4 宮城県 1142597 2164322  9113268 13.94881 14.58762 16.02524
5      5 秋田県  587615 1212417  3992081 13.28383 14.00813 15.19982
6      6 山形県  641912 1276292  4511686 13.37221 14.05947 15.32218
> result3 = lm( logY ~ logL+logK, data=data1 )
> summary(result3)

Call:
lm(formula = logY ~ logL + logK, data = data1)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.18037 -0.06390 -0.01708  0.05857  0.24851

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -0.2137     0.2903  -0.736  0.46558
logL           0.3765     0.1110   3.393  0.00147 **
logK           0.7506     0.1127   6.661 3.59e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.09524 on 44 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9872,    Adjusted R-squared:  0.9866
F-statistic: 1699 on 2 and 44 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

対数を使った重回帰分析の結果の解釈

$$\log Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \log L + \beta_2 \cdot \log K \Leftrightarrow \exp(\log Y) = \exp(\beta_0 + \beta_1 \cdot \log L + \beta_2 \cdot \log K)$$

$$\Leftrightarrow Y = \exp(\beta_0) \cdot \exp(\beta_1 \cdot \log L) \cdot \exp(\beta_2 \cdot \log K) = \exp(\beta_0) \cdot L^{\beta_1} \cdot K^{\beta_2}$$

```

> exp(result3$coefficients[1]) # a の値
(Intercept)
0.8075781

```

$$Y \cong 0.8076 \cdot L^{0.3765} \cdot K^{0.7506}$$